

Instruktion

Skalarprodukt, Vektorprodukt und Spatprodukt

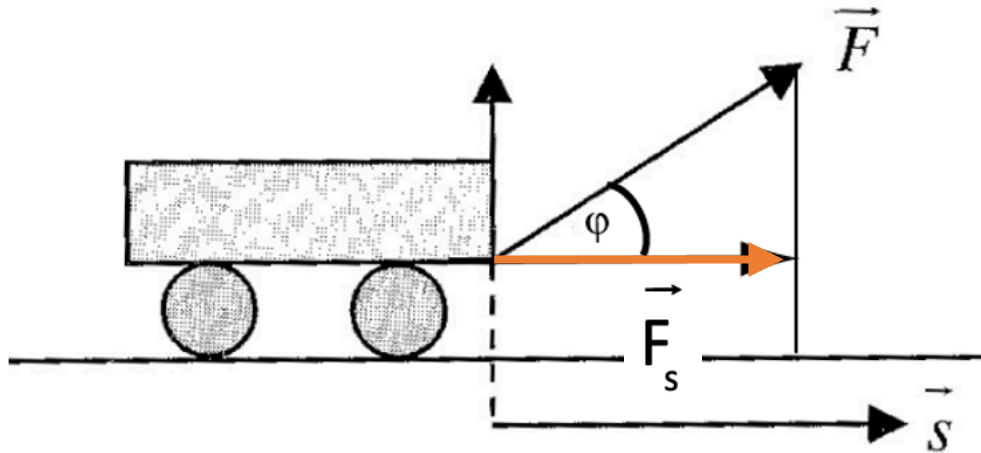


Das Skalarprodukt

In der Physik berechnet sich die Arbeit W nach der Formel $W = F \cdot s$, wenn eine konstante Kraft mit dem Betrag F in Richtung des Weges s wirkt.

Beispiel:

An der Deichsel eines Wagens wird mit der Kraft $\vec{F}$ unter einem Winkel φ schräg nach oben gezogen (siehe Skizze).



Es trägt nur die Komponente $\vec{F}_s$ zur Arbeit bei $|\vec{F}_s| = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi = \vec{F} \circ \vec{s}$$

Definition des Skalarprodukts:

Unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$.

Dabei sind $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ die Längen oder Beträge der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und α der kleinere der beiden Winkel, der von ihnen eingeschlossen wird.

Skalarprodukt in Koordinatenschreibweise:

Für das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^2$ bzw.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \quad \text{bzw.} \quad \vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Jedem Vektorpaar $\vec{a}, \vec{b}$ ist als Produkt eindeutig eine reelle Zahl (Skalar) zugeordnet.

Anwendungen des Skalarprodukt

1) Winkel zwischen zwei Vektoren: $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$

Für das Maß des Winkels φ zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des $\mathbb{R}^2$ oder des $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ mit } 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ mit } 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -3 - 24 + 20 = -7$$

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{42}$$

$$|\vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{61}$$

$$\cos \varphi = \frac{-7}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{61}} \approx -0,138 \quad \Rightarrow \varphi \approx 97,95^\circ$$

2) Orthogonale Vektoren: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ sind genau dann orthogonal (senkrecht),
wenn ihr Skalarprodukt Null ist:
 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$ ist.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 4 + 6 - 10 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Das Vektorprodukt

$$\text{Für die Vektoren } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ des } \mathbb{R}^3 \text{ heißt}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \text{ das Vektorprodukt der Vektoren } \vec{a} \text{ und } \vec{b}.$$

Bemerkungen:

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ ist dabei ein Vektor, der sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ orthogonal ist.
2. Das Vektorprodukt ist nur für Vektoren des $\mathbb{R}^3$ definiert, nicht für Vektoren des $\mathbb{R}^2$.
3. Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist wieder ein Vektor. Darin unterscheidet es sich vom Skalarprodukt.

Zur Berechnung des Vektorproduktes kann folgendes Schema verwendet werden:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Diagramm zur Berechnung des Vektorproduktes:

Die Komponenten a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 sind in Spalten angeordnet. Die Berechnung erfolgt durch die Determinante einer 3x3-Matrix, wobei die ersten und letzten Spalten wiederholt werden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Die Berechnung ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0-4 \\ 7-(-2) \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Rechengesetze für das Vektorprodukt:

Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (Alternativgesetz)

(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz)

(3) $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$ (Verträglichkeit mit S-Multiplikation)

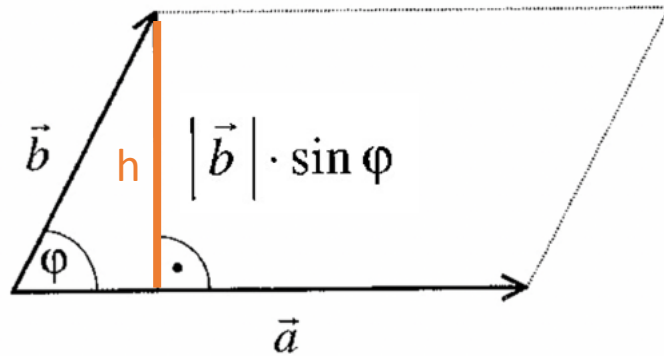
(4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Anwendungen des Vektorprodukts

1. Berechnung des Normalenvektors

Der Vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und heißt Normalenvektor.

2. Berechnung der Fläche eines Parallelogramms



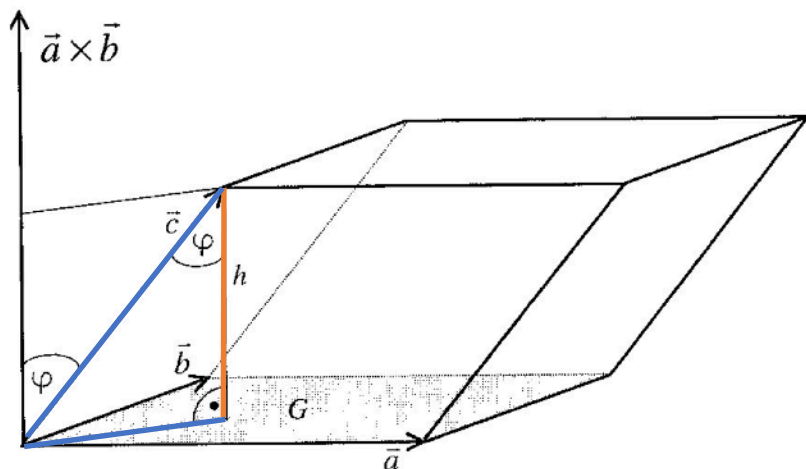
$$A = g \cdot h = |\vec{a}| \cdot h$$

$$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Bemerkung:

Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich durch $A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$

3. Volumen eines Spats

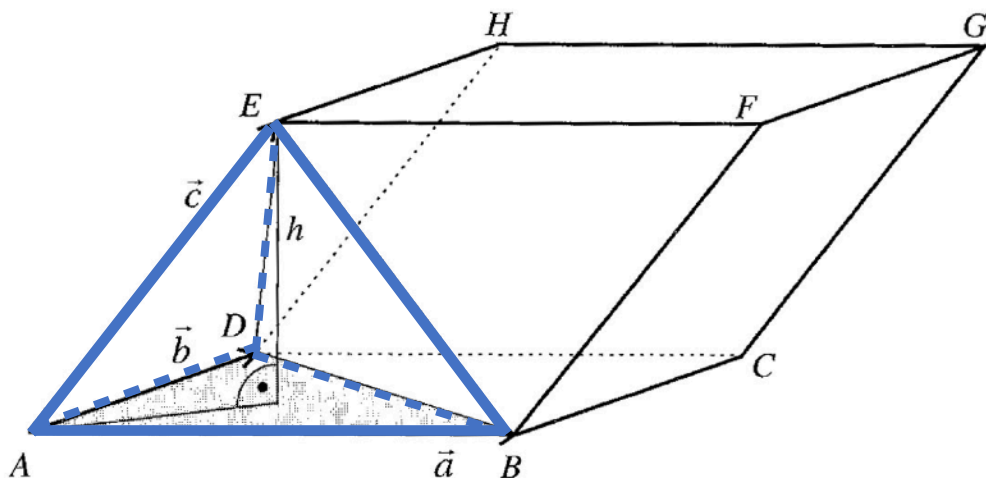


$$V_{\text{Spat}} = G \cdot h$$

$$G = |\vec{a} \times \vec{b}| \quad h = |\vec{c}| \cdot \cos \varphi$$

$$\Rightarrow V_{\text{Spat}} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \varphi = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}| \quad (\text{Spatprodukt})$$

Folgerung: Volumen einer dreiseitigen Pyramide



Drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$ spannen eine Pyramide ABDE auf.

$$V = \frac{1}{3} \cdot G_{\text{Pyramide}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot G_{\text{Spat}} \right) \cdot h = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

$$V_{\text{vierseitige Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$